

Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις, Ιούνιος 2023

Θέμα 1

Θεωρούμε την εξίσωση

$$(E) \quad y''' + 9y' = f(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad f \in C^1([0, +\infty)).$$

(i) [1.2] Να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης (E).

(ii) [0.4] Να βρεθεί η λύση y_0 της διαφορικής εξίσωσης (E) που ικανοποιεί τις συνθήκες

$$y_0(0) = y_0'(0) = 0, \quad y_0''(0) = 1.$$

(iii) [0.4] Ναδειχθεί ότι η συνθήκη $\int_0^\infty |f(t)| dt < \infty$ είναι ικανή συνθήκη ώστε όλες οι λύσεις της (E) να είναι φραγμένες.

(iv) [0.5] Να δοθεί ένα παράδειγμα φραγμένης συνάρτησης f έτσι ώστε η λύση y_0 της (E) να είναι μη φραγμένη στο $[0, +\infty)$.

Θέμα 2

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad (2x^2 + 2y^2 + x)dx + (x^2 + y^2 + y)dy = 0, \quad x \geq 0.$$

(i) [1.3] Να επιλυθεί η εξίσωση (E), αφού πρώτα διαπιστωθεί ότι έχει ολοκληρωτικό παράγοντα την συνάρτηση $\rho(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1}$.

(ii) [0.6] Να βρεθεί λύση της εξίσωσης (E) η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $y(1) = 0$. Υπάρχει λύση της εξίσωσης (E) η οποία ικανοποιεί τη συνθήκη $y(0) = 0$;

(iii) Να εξετασθεί η ισχύς των παρακάτω προτάσεων:

(a) [0.3] Υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις της εξίσωσης (E).

(b) [0.3] Για κάθε λύση y της εξίσωσης (E), ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -\infty$.

Θέμα 3

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$(E) \quad (1 - x^2)y''(x) - 5xy'(x) + 10y(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Να περιγραφεί ένας τρόπος εύρεσης ενός βασικού συνόλου λύσεων της εξίσωσης (E):

α) [0.6] γύρω από το σημείο $x_0 = 1$, β) [0.4] γύρω από το σημείο $x_0 = 0$.

(ii) [0.5] Να διατυπωθεί στη γενικότητά της, η πρόταση η σχετική με τον τύπο Liouville για μια ομογενή γ.δ.ε n -τάξης.

(iii) [0.5] Να εξετασθεί αν υπάρχει ομογενής γ.δ.ε με βασικό σύνολο λύσεων το

$$S = \{e^x, \sin x, \sin 2x, \sin 3x\}.$$

(iv) [0.5] Να βρεθεί και να επιλυθεί μια ομογενής γ.δ.ε με σταθερούς συντελεστές η οποία έχει χαρακτηριστικό πολυώνυμο το $P(\lambda) = \lambda^3(\lambda^3 - 1)^2$.

Θέμα 4

Θεωρούμε το π.α.τ

$$y'(x) + e^x(2 + \sin x)y(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad y(0) = a, \quad x \geq 0 \quad (a \in \mathbb{R}).$$

- (i) [0.5] Να λυθεί το ανωτέρω π.α.τ.
- (ii) Να εξετασθεί η αλήθεια των ισχυρισμών:
- (a) [0.5] Για κάθε λύση y του π.α.τ ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$.
- (b) [0.5] Υπάρχουν τελικά αρνητικές λύσεις του π.α.τ.
- (c) [0.5] Υπάρχουν ταλαντούμενες λύσεις του π.α.τ.

Θέμα 5

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x, y) = 3x^2 e^y \sqrt{y+1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \geq -1.$$

- (i) [0.8] Να εξετασθεί αν η συνάρτηση f πληροί τη συνθήκη Lipschitz στα σύνολα
α) $D_1 = [-1, 0] \times [0, 1]$ και β) $D_2 = [0, 1] \times [-1, 0]$.

- (ii) [0.9] Να εξετασθεί ως προς την ύπαρξη και το μονοσήμαντο το π.α.τ

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

για τις περιπτώσεις:

$$\alpha) x_0 = 0, y_0 = 1, \quad \beta) x_0 = 1, y_0 = 0, \quad \gamma) x_0 = y_0 = 0.$$

- (iii) [0.8] Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' = 2yy'$.

- Να δοθούν απαντήσεις σε τέσσερα το πολύ θέματα

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ